

A kutatási téma címe: **Többmezős variációs elvek és végeelem-modellek a nemlineáris rugalmasságtanban**

Témavezető: **Dr. Bertóti Edgár egyetemi tanár, az MTA doktora**

Résztvevők: –

Kutatási előzmények, célkitűzések, motíváló tényezők

A klasszikus, elmozdulásmezőre és a virtuális munka elvre épülő végeelem-modellekkel szembeni egyik legnagyobb kihívást azok a numerikus konvergencia problémák jelentik, amelyek az angol nyelvű – ezen a területen is óriási méretű – szakirodalomban *numerical locking* néven ismertek (magyarul a jelenség lényegét a *numerikus bemerevedés* fejezi ki találóan). Ez a jelenség elsősorban az alacsonyrendű approximációt és elemsűrítést alkalmazó ún. *h*-verziós végeelem-módszerre jellemző olyan kicsiny paramétert tartalmazó – ún. szingulárisan perturbált differenciálegyenletekkel leírható – problémák megoldásánál, amikor a paraméter értéke zérushoz tart. Megnyilvánulásának lényege, hogy a numerikus megoldás hibája a szabadságfok (elemszám) növelésével nem, vagy alig csökkenthető, súlyosabb esetben a hiba akár növekedhet is. A problémák jelentős része elkerülhető a rögzített méretű elemeken alkalmazott polinomok fokszámának növelésével, az ún. *p*-verziós végeelem-módszer alkalmazásával.

A kutatási feladat célkitűzéseit leginkább az a – szakirodalomban 1998-ban közzétett, matematikailag is bizonyított – felismerés motíválta, mely szerint bizonyos héjfeladatok esetén az elmozdulásmezőre épülő *p*-verziós elemek sem mentesek a *numerical locking* nevű jelenségtől, vagyis ilyen esetekben sem a *h*-, sem a *p*-verziós héjelemek nem tudnak megfelelő konvergenciájú megoldást adni a mérnöki alkalmazások szempontjából elsőrendű fontosságú feszültségmezőre nézve.

Az említett numerikus konvergencia problémák a többmezős – az angol szakirodalomban *multi-field*, illetve *mixed-hybrid* néven emlegetett – variációs elvek és a hozzájuk kapcsolódó *h*- és *p*-verziós végeelem-modellek alkalmazásával kerülhetők el – jelenlegi ismereteink szerint – a leghatékonyabban. Ezt a felismerést a témavezető által összenyomhatatlan anyagokra korábban kidolgozott, feszültségmezőre és forgásmezőre épülő *hp*-verziós végeelem-modellek teljes mértékben alátámasztották. Az ilyen típusú *hp*-verziós elemekre vonatkozó igényt jelzik, többek között, az ebben a témában (is) nagy erővel folyó nemzetközi – alkalmazott matematikai és mechanikai – kutatások.

A kutatási feladat egyik legfontosabb célkitűzése egy új, feszültségmezővel és forgásmezővel felépített, az általánosított kiegészítő virtuális munka elvén, mint variációs elven alapuló, dimenzió szerint redukált nemlineáris héjelmélet kidolgozása volt. A tervezett kutatási feladat további céljai között szerepelt egy olyan új, feszültségmezőre és forgásmezőre épülő *hp*-verziós végeelem-modell kidolgozása lemezfeladatokra, mely a lemez vastagságától/vékonyaságától függetlenül numerikus bemerevedési problémák (*numerical locking*) nélküli megoldásokat ad. Az ilyen modell egyben lehetővé teszi a feszültségmező megbízható, nagy pontosságú számítását (is), mind *h*-, mind *p*-típusú approximáció esetén.

A kutatási eredmények részletezése

A kutatási feladat célkitűzéseinek megfelelően elsőként egy feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló általános, nemlineáris héjelméletet dolgoztam ki. A dimenzió szerinti redukálás variációs háttéréül a kiegészítő virtuális munka elv általánosított alakja, illetve a Fraeijs de Veubeke-féle variációs elv szolgált, amelyeknek alapváltozói (függetlenül variálható mezői) az I. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor és az alakváltozási gradiens poláris felbontásában megjelenő ortogonális forgástenzor.

Az említett kétdimenziós héjelmélet felépítésének egyik legfontosabb alaplépése az I. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzorra vonatkozó egyensúlyi egyenletek *a priori* kielégítése, tetszőleges héjgeometria esetén. Kimutattam, hogy ennek megvalósításához a tenzoriális egyensúlyi egyenlet vektoriális alakjára célszerű áttérni, amelynek az az előnye, hogy ebben a feszültségi koordinátákra vonatkozó kovariáns deriváltak helyett a feszültségvektorokra vonatkozó parciális deriváltak jelennek meg.

Az I. Piola-Kirchhoff feszültségvektorokra vonatkozó transzlációs egyensúlyi egyenletek felírása után előállítottam a héj középfelületi normálisa mentén mért ívkoordináta szerint sorbafejtett feszültségvektorok egyensúlyi együtthatóit. A feszültségvektorok, majd az I. Piola-Kirchhoff feszültségek egyensúlyi együtthatóit általános héjgeometria esetén, két elsőrendű feszültségfüggvény-vektor alkalmazásával származtattam. A sorbafejtett I. Piola-Kirchhoff feszültségek egyensúlyi együtthatóit a héj palástperemein előírt tetszőleges peremfeltételek esetére, majd kizárólag feszültségi peremfeltételi előírás esetén is megadtam. A héjmodell kétdimenziós Euler-Lagrange egyenleteit és természetes peremfeltételeit az általánosított kiegészítő virtuális munka elv nemlineáris alakjából kiindulva származtattam, amelyek

- az elsőrendű kompatibilitási egyenletekből és a Cauchy feszültségi tenzor szimmetriáját kifejező (forgási) egyensúlyi egyenletekből, valamint
- az elsőrendű kompatibilitási-, alakváltozási és illesztési peremfeltételekből

állnak. Ezeket az egyenleteket és peremfeltételeket az elmozdulásmező gradiensének a héj vastagsága menti integrálásával képzett eredőire, valamint a Cauchy feszültségi tenzorral képzett feszültségi eredőkre vezettem le a héj középfelületéhez kötött konvektív koordináta-rendszerben.

A kidolgozott általános, nemlineáris, egyensúlyi feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló héjelmélet, illetve héjmodell egyik fontos tulajdonsága, hogy annak felépítése során nem kerültek alkalmazásra a klasszikus héjelméletek alapjául szolgáló kinematikai és feszültségi hipotézisek, így a háromdimenziós anyagegyenletek módosítások nélkül alkalmazhatók. A vizsgálatok során kimutatásra került továbbá a kidolgozott héjmodell egyensúlyi feszültségmezőjét előállító elsőrendű feszültségfüggvények és a – nem szimmetrikus – feszültségi eredők és erőpárok egyensúlyát biztosító feszültségfüggvények közötti kapcsolat is.

A kutatási feladat következő lépéseként az előzőekben ismertetett általános nemlineáris héjelméletből kiindulva egy feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló nemlineáris lemezmo-

dellet származtattam, majd egy új *hp*-verziós lemezelem-modellt dolgoztam ki lineárisan rugalmas lemezfeladatok numerikus megoldásához. A munka során

- elvégeztem a héjfeladatok megoldásának alapjául szolgáló variációs elv nemlineáris alakjának, illetve a lemezmodell egyenleteinek konzisztens linearizálását;
- a kidolgozott lemezmodell ismeretlenjeinek számát a transzverzális nyírófeszültségek szimmetriájának – integrál-átlagban történő – *a priori* kielégítésével csökkentettem, így a végeelem-modell két elsőrendű feszültségfüggvény-vektor és egy szögelfordulás-vektor összesen hét skaláris koordinátájának közvetlen approximációján alapul;
- olyan numerikus algoritmusokat és iterációs eljárást dolgoztam ki, amelyek alapján geometriailag nemlineáris lemezfeladatok is megoldhatók (feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló végeselmes approximációval);
- az egyensúlyi feszültségmezőt előállító elsőrendű feszültségfüggvények és a forgásmező közvetlen approximációján alapuló – többféle stabil approximációs térrel is dolgozni képes – új *h*- és *p*-verziós végeelemeket dolgoztam ki;
- kifejlesztettem egy új végeelem-programot, amely jelenlegi formájában egy több ezer program-sorból álló, C/C++ programozási nyelven megírt kutatói kód;
- elvégeztem az elkészített számítógépi program tesztelését, amely magában foglalja a numerikus megoldások előállítását, kiértékelését és azok összevetését a szakirodalomban közölt megoldásokkal, illetve a jelenleg ismert modellek és elemek alkalmazásával kapott eredményekkel.

Meg kell említeni, hogy a kutatási program végrehajtása során a fent említett programozási és tesztelési munka bizonyult a legidőigényesebb feladatnak valamennyi sikeresen végrehajtott feladat közül. A megírt programnak ugyanakkor a gyakorlati alkalmazások szempontjából, illetve az eredmények hasznosíthatósága szempontjából alapvető jelentősége van.

A kidolgozott lemezmodell és a kifejlesztett *hp*-verziós lemezelemmel kapcsolatos – a célkitűzésekben is megfogalmazott – elvárásokat az elvégzett numerikus számítások és az összevetések a legmesszebbmenőkig igazolták. Numerikus úton igazoltam, hogy a lemezmodell aszimptotikusan korrekt, modellezési hibája lényegesen jobb, mint a klasszikus Kirchhoff- és Reissner-Mindlin lemezmodelleké. A *hp*-verziós lemezelem rendkívül vékony lemezek esetén is numerikus konvergencia és bemerevedési problémák (*shear locking* és *incompressibility locking*) nélküli, megbízható, nagy pontosságú feszültségeket eredményez olyan esetekben is, amikor az elmozdulásmezőre épülő *hp*-verziós modellek eredményei megbízhatatlanok vagy értékelhetetlenek. Kimutattam, hogy a kifejlesztett *h*-, illetve *p*-típusú elemekkel kapott numerikus megoldások konvergencia sebessége független a lemez vastagságától/vékonságától (angol szakkifejezéssel élve az elem *locking-free*), és lényegesen jobb eredményeket ad, mint az elmozdulásmezőre épülő akár *h*-, akár *p*-verziós elemek.

Az eredmények hasznosításának lehetőségei

A kifejlesztett héj-, illetve lemezmodell, valamint az új *hp*-verziós végelem-modellek és a kapcsolódó végelem-program lemezfeladatok (egyben membrán-, illetve síkrugalmasságtani feladatok) hatékony, numerikus konvergencia problémák nélküli végeselemes megoldására alkalmazhatók. A feszültségmező és a forgásmező közvetlen approximációján alapuló elem-modellek a hagyományos, elmozdulásmezőn alapuló végelem-modellekkel szembeni előnyei elsősorban vékony lemezek és/vagy összenyomhatatlan anyagú testek számításánál jelentkeznek. Ezen előnyök közül első helyen a mérnöki alkalmazások szempontjából kiemelkedő fontosságú feszültségmező megbízható és pontos kiszámíthatósága említendő meg. A nemlineáris alkalmazások szempontjából lényeges kiemelni, hogy a kidolgozott *hp*-verziós végelem-modellek nemcsak *p*-, hanem *h*-típusú approximáció esetén is mentesek az elmozdulásmezőn alapuló modelleknél tapasztalható numerikus konvergencia (angol nevén *numerical locking*) problémáktól.

Összegzés

Az OTKA által támogatott, T34358 számon nyilvántartott kutatási program végrehajtása során – témavezetőként és egyedüli résztvevőként – elért eredményeim egy részét eddig három, nemzetközi szinten is rangosnak tekinthető konferencia *proceedings*-ben [7][10][12], két angol nyelvű, referált folyóiratcikkben [8][16], két, kizárólag specialisták – egyben meghívott előadók – számára rendezett *workshop*-on [6][15], továbbá három angol nyelvű ([1][3][13]) és öt magyar nyelvű ([2][4][5][11][14]) konferencia előadás/szakmai előadás keretében publikáltam, illetve ismertettem. Ezeken kívül, részben a korábbi, OTKA által is támogatott kutatómunkám, részben az itt elért eredményeim alapján 2003-ban MTA Doktori értekezést készítettem [9], amelyet 2004. novemberében sikeresen megvédtem.

Publikációk jegyzéke (OTKA T34358)

1. Bertóti, E. Dimensional reduction for plates in terms of stresses, Oberseminar „*Analysis und Numerische Methoden für partielle Differentialgleichungen der Strömungs- und Festkörpermechanik*”, January 30, 2001, Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart, Germany.
2. Bertóti, E. Variációs elvek és numerikus modellek feszültségmezővel és forgásmezővel, *Emlékezés a 100 éve született Sályi István professzor tiszteletére*, 2001. október 5, MTA Miskolci Akadémiai Bizottság Székháza, Miskolc.
3. Bertóti, E. Locking-free plate bending elements – a complementary energy approach, *Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics in Science and Engineering*, July 15-19, 2002, Miskolc, Hungary.

4. Bertóti, E. Rugalmasságtani feladatok numerikus megoldása feszültségmezőn alapuló véges-elem-modellek alkalmazásával, *5. Alkalmazott Matematika Napja*, 2003. február 26, ELTE, Budapest.
5. Bertóti, E. Nemlineáris lemezmodell feszültségmezővel és forgásmezővel, *IX. Magyar Mechanikai Konferencia*, 2003. augusztus 27 - 29, Miskolc.
6. Bertóti, E. Dual-mixed variational formulation and finite element models for plates and shells, *303. WE-Heraeus Seminar*, September 7-10, 2003, Bad Honnef, Germany.
7. Bertóti, E. Stress-based and locking-free hp finite elements for thin elastic plates, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, July 7-12, 2002, Vienna, Austria. Editors: H.A. Mang; F.G. Rammerstorfer; J. Eberhardsteiner, Publisher: Vienna University of Technology, Austria, pp. 1–10. ISBN 3-9501554-0-6, wccm.tuwien.ac.at
8. Bertóti, E. Dual-mixed p and hp finite elements for elastic membrane problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53** (2002) 3–29. (IF: 1,468)
9. Bertóti, E. Héjak nemlineáris elmélete feszültségmezővel és forgásmezővel, *MTA doktori értekezés*, Magyar Tudományos Akadémia – Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003, 133 p.
10. Szabó, B. and Bertóti, E. Application of Trefftz fields in post-solution procedures, *Proceedings of the Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI in conjunction with APCOM'04)*, September 5-10, 2004, Beijing, China. Editors: Z.H. Yao, M.W. Yuan and W.X. Zhong, Publisher: Tsinghua University Press & Springer-Verlag, Beijing, China, pp. 653–660.
11. Bertóti, E. Feszültségmezőre épülő végeselem-modellek a szilárd testek mechanikájában. *MTA Műszaki Tudományok Osztályának ülése*, 2005. április 28, MTA Miskolci Akadémiai Bizottság Székháza, Miskolc.
12. Bertóti, E. Derivation of plate and shell models using the Fraeijs de Veubeke variational principle, *Proceedings of the 5th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures*, June 1-4, 2005, Salzburg, Austria. Editors: E. Ramm, W.A. Wall, K.U. Bletzinger and M. Bischoff, pp. 1–4, www.iassiacm2005.de
13. Bertóti, E. An error indicator for p -finite elements, *Finite Element Method in Mathematics and Engineering – A scientific meeting on the occasion of the seventieth birthday of Prof. Barna Szabó*, Miskolc Center of the Hungarian Academy of Sciences, July 5, 2005, Miskolc, Hungary.
14. Bertóti, E. Nemlineáris héjmodell elsőrendű feszültségfüggvényekkel, *Egyes kontinuummechanikai feladatok – Tudományos ülés Kozák Imre professzor 75. születésnapja tiszteletére*, 2005. szeptember 1, MTA Miskolci Akadémiai Bizottság Székháza, Miskolc.
15. Bertóti, E. Dual-mixed hp finite element models in elasticity, *International Workshop on „Direct and Inverse Field Computations in Mechanics”*, November 7-11, 2005, Linz, Austria, www.ricam.oeaw.ac.at
16. Bertóti, E. On the stress function approach in three-dimensional elasticity. *Submitted for publication to Acta Mechanica*, November 15, 2005.